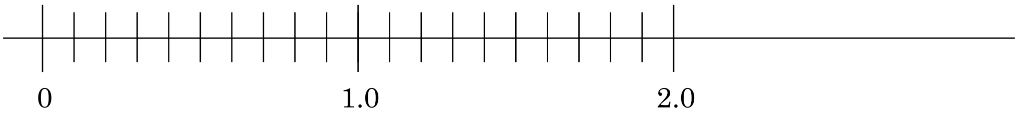
2019 年度前期　機械工学概論と機械工学概論 I　期末テスト問題（2019 年 8 月 5 日 1 限　204 号教室）
以下の設問に解答してください．解答の順番は自由です．解答用紙は **3 枚提出してください**.

1.　下記の目盛り上に記入した値を読み取ると，2×0.766 がいくつになるか説明してください.



2.　平地に静止した状態から体重 70 ㎏の人が 3.0 秒間で時速 20.0 ㎞に加速する仕事率を求めてください.

3.　回転軸が，一秒間に n 回転し，仕事率 P W の出力を発揮するとき，トルクを求めてください.（トルクは，力のモーメントと同じ意味で，回転方向にかかる力の大きさとその作用点と回転中心の距離の積です.）

4.　幅と長さが均一な平板状の硬質塩化ビニル板において，厚さが 1.0㎜ から 0.5ｍｍになると曲げ剛性 IE が何倍になるか求めてください．縦弾性係数 E は物質の厚さで変化しません．断面 2 次モーメント I は，中立面からの厚さ方向の変位を y とし，式(1)で与えられます．ここでは板厚の中心が y=0 となります.

$$I = \int_A \mathrm{y}^2 dA \tag{1}$$

5.　厚さと密度が均一な円盤を，円の中心を回転中心とするフライホイルとして用いる．円盤の半径を 2 倍にしたときに，慣性モーメントが何倍になるか計算してください．慣性モーメントは，質量 dm の回転中心からの距離を r として，r^2dm を全体に積分することで求められます.

6.　式(2)(3)の関係を利用するオイラー法を参考に，表 1 において x=2.5 の dy/dx を算出してください.

表 1　オイラー法を参考に dy/dx を計算する問題のための数値

X	1	2	3	4	6
Y	12	6	4	3	2

$$x_1 = x_0 + h \tag{2}$$

$$y_1 = y_0 + h\frac{dy}{dx} \tag{3}$$

7.　鉛直な y 軸上を滑らずに回転しながら上昇する円形の物体について，回転する角度を θ，半径を r とし，円周上の点 P(x_P, y_P)の原点 O に対する位置が式(4)で表される．角 θ を時間 t の関数，α および半径 r を定数として，原点 O に対する点 P の運動の加速度を計算してください.

$$\begin{pmatrix} x_\mathrm{P} \\ y_\mathrm{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ r\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \end{pmatrix} \tag{4}$$

8.　式(5)の微分方程式と表 2 を基に角加速度 α_0，角速度 ω_1 と時間 t_1 を計算する式を作成してください．表 2 の背景が白い欄は数値が既知もしくは初期値として与えられると仮定し，時間や角速度を求めるモデルは適宜自分で考えてください.

$$D(\varphi)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = A(\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + B(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} + C(\varphi) \tag{5}$$

表 2　微分方程式で表された運動方程式に関係する係数や計算条件

角度 φ	係数 $D(\varphi)$	係数 $A(\varphi)$	係数 $B(\varphi)$	係数 $C(\varphi)$	角速度 $\frac{d\varphi}{dt}$	角加速度 $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$	時間 [秒]
φ_0	D_0	A_0	B_0	C_0	ω_0	α_0(未知)	t_0
φ_1	D_1	A_1	B_1	C_1	ω_1(未知)	α_1(未知)	t_1(未知)
φ_2	D_2	A_2	B_2	C_2	ω_2(未知)	A_2(未知)	t_2(未知)

Moodle 上での答案返却を予定しており，異議申し立てを 8 月 8 日 10 時から 17 時まで受け付ける予定です.

配点と解答例

問 1

2×0.766=1.532 だが, 目盛りは 0.1 が最小なので, 0.032 を切り捨てて，2×0.766=1.5 とする．

- （12 点）
- 注：2×0.766≒1.5 と記述してはならない．

問 2

加速度 a, 速度 v, 静止した位置からの距離 x, 発進してからの時間 t, 仕事率 P, 力 F, 車重 m に式（1）-(4)の関係がある．式(1)-(4)を整理すると式(5)が得られる．

$a=v/t$ (1)

$x=at^2/2$ (2)

$P=Fx/t$ (3)

$F=ma$ (4)

$P=(mv^2/2)/t$ (5)

式(5)と与えられた条件から，仕事率は 360W が得られる．

- 以上を適切に説明する（6 点）
- 計算式への数値の代入を最後にする（2 点）
- 適切な単位に変換して数値を代入し, 求めた数値に適切な単位をつける（2 点）
- 適切な（今回は 3 ケタ以下）の値で求める（2 点）
- 計算を誤らない（1 点）

問 3

力を F, 移動距離を L, 時間を t として,

$$P=\frac{FL}{t} \quad (1)$$

ここで回転中心からの力の作用点までの距離を r としたとき,

$$F=\frac{T}{r} \quad (2)$$

$$L=2\pi rnt \quad (3)$$

式(1) (2)(3)を T について整理し，式(4)を得る．

$$T=\frac{P}{2\pi n} \quad (4)$$

以上より，$P/(2\pi n)$　N・m を得る（10 点）

問 4

式(1)を参考に, 板厚 0.5mm の断面二次モーメント $I_{0.5}$ と板厚 1.0mm の断面二次モーメント $I_{1.0}$ は，それぞれ以下で表される．

$$I_{0.5}=\int_{-0.25\times10^{-5}}^{0.25\times10^{-5}} \mathrm{y}^2 dA \quad (4\text{-}1)$$

$$I_{1.0}=\int_{-0.5\times10^{-5}}^{0.5\times10^{-5}} \mathrm{y}^2 dA \quad (4\text{-}2)$$

式(5-1)(5-2)より $I_{0.5}/I_{1.0}$ は 12.5%となる．よって，厚さが半分倍になると曲げ剛性は 8 分の 1 倍になる．

- それぞれ積分範囲を-0.25×10^{-3} から 0.25×10^{-3} および-0.50×10^{-3}から 0.50×10^{-3}とする．(15 点)
- 曲げ剛性が 8 分の 1 倍になる旨を記述する．(5 点)

問 5

厚さ t と密度 ρ の円盤において，中心から半径 r の位置で幅 dr の円環の質量 dm を式(1)で表せるものとする．式(1)と慣性モーメントと定義から，半径 R の円盤の慣性モーメントは式(2)で表され，半径 $2R$ の円盤の慣性モーメントは式(3)で表される．その比は式(4)で求められる．

$$dm=\rho t(2\pi r)dr \quad (1)$$

$$I_R=\int_0^R r^2 dm \quad (2)$$

$$I_{2R}=\int_0^{2R} r^2 dm \quad (3)$$

$$\frac{I_{2R}}{I_R}=\frac{(2R)^4}{(R)^4}$$

$$=16 \quad (4)$$

以上より, 円盤の半径を 2 倍にすると慣性モーメントは 16 倍になると言える．

- 式(1)の作成(6 点)
- 式(2)で適切に積分範囲を定める．(6 点)
- 16 倍になる旨の結論を導くを得る．(2 点)

問 6

式(2)(3)を整理すると式(6-1)が得られる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \qquad (6\text{-}1)$$

ここで 2 と 3 の間に 2.5 があり，式(6-1)より x が 2 から 3 の間の変化の割合を x=2.5 における dy/dx とする．よって表 1 と式(6-1)から

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4-6}{3-2} = -2 \qquad (6\text{-}2)$$

以上より，x=2.5 において dy/dx=-2 である．

- $\frac{dy}{dx} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$を得る．(10 点)
- 傾きの数値解を得る．(1 点)

問 7

位置を時間 t で 2 階微分したものが加速度になる．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_\mathrm{p} \\ y_\mathrm{p} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r \\ r\theta \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\cos\theta & \frac{d}{dt}(-\sin\theta) \\ \frac{d}{dt}\sin\theta & \frac{d}{dt}\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(r\sin\alpha) \\ \frac{d}{dt}(r\cos\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ r\frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} - \frac{d\theta}{dt}\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \end{pmatrix}$$

この式を更に時間 t で微分する．

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_\mathrm{p} \\ y_\mathrm{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r\frac{d^2\theta}{dt^2} \end{pmatrix}$$

$$-\frac{d^2\theta}{dt^2}\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \end{pmatrix}$$

以上の計算で示される $\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_\mathrm{P} \\ y_\mathrm{P} \end{pmatrix}$ が点 P の加速度である．

- 位置ベクトルを時間で 2 階微分すると加速度が得られる旨の説明をする(3 点)
- 速度の計算結果を得る（1 点)．なお微分の計算が終わっていない解答の場合は，計算結果を得たとはみなさない．
- 加速度の計算結果を得る(1 点)．

問 8

式(5)から式(8-1)が得られる．

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{D(\varphi)}\left\{A(\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + B(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} + C(\varphi)\right\} (8-1)$$

表の値を用いて角加速度 $\alpha 0$ は式(8-2)で表される．角度 φ_0 から φ_1 までの角速度が ω_0 一定だと仮定すると式(8-3)が得られ，角度 $\phi 1$ における角速度 $\omega 1$ は式(8-4)で与えられる．

$$\alpha_0 = \frac{1}{D_0}(A_0{\omega_0}^2 + B_0\omega_0 + C_0) \qquad (8\text{-}2)$$

$$t_1 = t_0 + \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\omega_0} \qquad (8\text{-}3)$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha_0(t_1 - t_0) \qquad (8\text{-}4)$$

- 式(8-2)を得る．（12 点）
- 角速度の考え方を述べて式(8-3)を得る．角速度を一定とみなさないモデルを考える場合は，例えば「式(8-4)を時間で積分する」などの式の導出も説明が必要で，解答例とは解答の順番も異なる．(1 点)
- 式(8-4)の導出．(2 点)